7. FUNCIONES Y GRAFICAS

Definiciones

Una *función* sobre *D,* con $D \subset \mathbb{R}$, es una regla que a cada número *x* de *D* le asocia un sólo número y de $\mathbb{R}$. Se representa en la forma $f : D \to \mathbb{R}$. *y* se llama *imagen* de *x* y se escribe *y = f(x).*

Se entiende por *dominio* de la función f, o campo de definición, al conjunto

$$\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ con } y = f(x)\},$$

mientras que la *imagen* de la función, o recorrido, es el conjunto

$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ con } y = f(x)\}.$$

Se llama *gráfica* de la función f al subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\},$$

es decir, el subconjunto de los puntos del plano real que verifican que su ordenada es la imagen de su abscisa.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, tiene por dominio todos los números reales,

ya que cualquier número real podemos elevarlo al cuadrado, dándonos un número real positivo, por lo que la imagen será el conjunto de los reales positivos, es decir,

$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^+.$$

La gráfica de esta función es el conjunto de puntos del plano que están situados sobre la parábola $y = x^2$.

Dominios

La función $f_1(x) = 4x^3 - 2x + 6$ tiene por dominio $\mathrm{Dom} f_1 = \mathbb{R}$, ya que las operaciones indicadas pueden hacerse.

Esto ocurre con todas las funciones polinómicas.

La función $f_2(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

tiene por dominio todos los números reales excepto el 1, ya que la suma y la resta son siempre posibles, pero la división sólo es posible cuando se hace con divisor distinto de cero, luego

$$\mathrm{Dom} f_2 = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Esto mismo ocurrirá con todas las funciones racionales, por lo que estas funciones tendrán como dominio todos los números reales excepto los que anulen el denominador, si los hubiera.

Dominios

La función $f_3(x) = \sqrt{3x-2}$

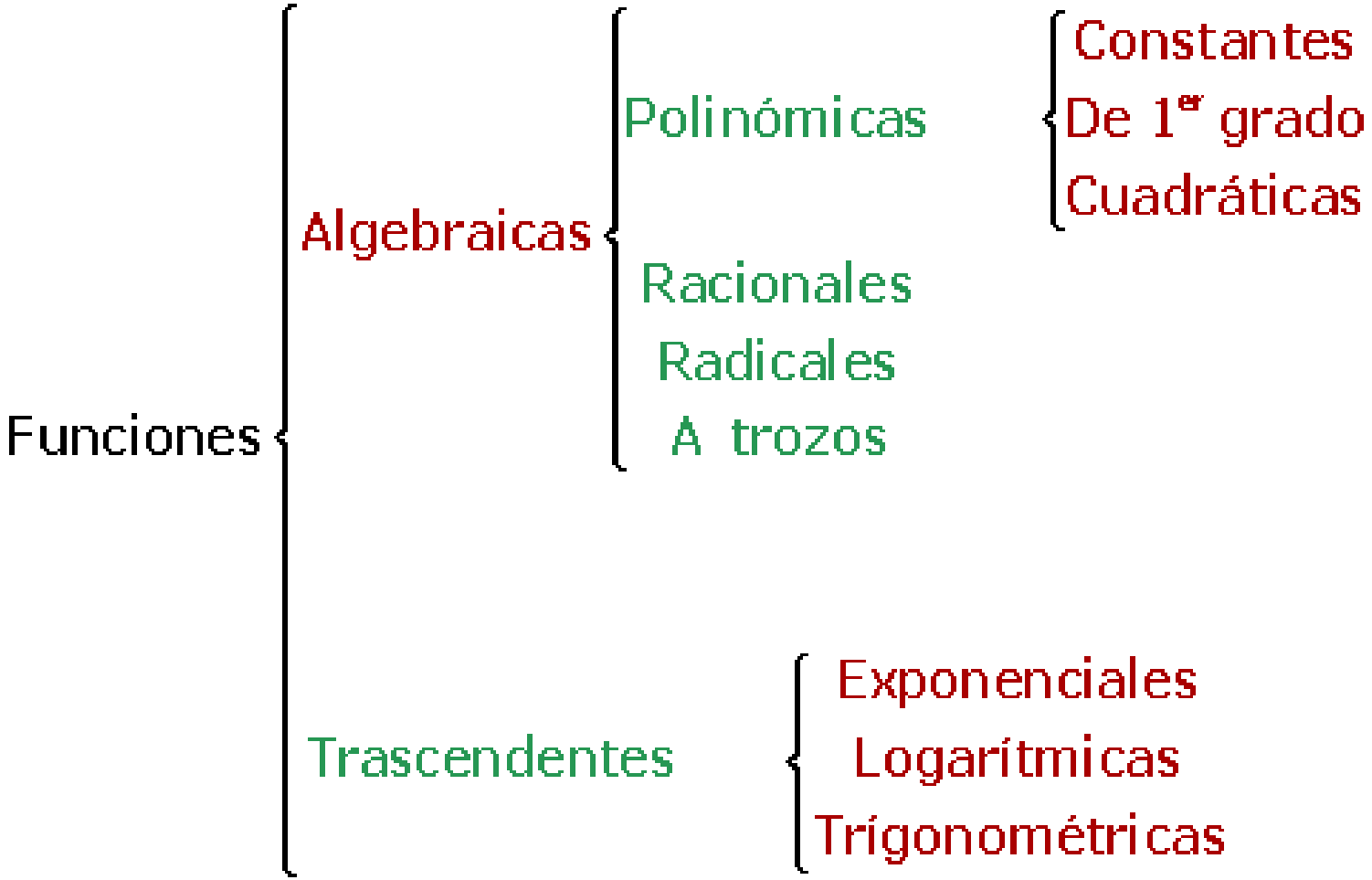
tendrá por dominio todos aquellos números reales tales que sea

$$3x - 2 \geq 0,$$

para que pueda efectuarse la operación de la raíz cuadrada, ya que no existen raíces cuadradas de números negativos en el conjunto de los números reales, es decir,

$$\mathrm{Dom} f_3 = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 \geq 0\} = [\tfrac{2}{3}; +\infty).$$

Clases de funciones



Funciones elementales

Una *función constante* es de la forma *f(x) = c,* siendo *c* cualquier número real prefijado.

Esta función transforma todos los números reales en el número c, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es *{c}.*

La gráfica de estas funciones es siempre una recta horizontal, de ecuación *y = c.*

Casos especiales son aquellos en que es *c = 0* y *c = 1,* que nos dan funciones que son el elemento neutro de la suma y el neutro del producto de funciones.

Funciones elementales

Las *funciones lineales* de la forma $f(x) = mx$, siendo m una constante real no nula.

Esta función tiene por dominio y por recorrido todos los números reales y su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente igual a m.

Si es $m>0$ se trata de una función estrictamente creciente que aumenta m unidades por cada unidad que crece x, mientras que si m es menor que 0, entonces la función es estrictamente decreciente.

El caso particular $m = 1$ corresponde a la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero, siendo la gráfica de la función identidad en $\mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Funciones afines

Las *funciones afines* de la forma $f(x) = mx + n$, siendo m y n constantes reales y $m \neq 0$.

Estas funciones tienen por dominio y por recorrido todos los números reales y sus gráficas son rectas que pasan por el punto $(0,n)$ y tienen pendiente igual a m.

Esta gráfica se puede obtener trasladando la de la función lineal asociada $f(x) = mx$, mediante el vector $(0,n)$. El valor n se llama "ordenada en el origen".

Cualquier ecuación de primer grado en x e y puede ponerse en la forma $Ax + By + C = 0$, llamada ecuación general de la recta, los casos $A = 0$ y $B = 0$ corresponden a rectas horizontales o verticales, respectivamente

Funciones potenciales

Son las funciones de la forma $f(x) = x^n$ siendo n un número natural. En el caso $n = 1$ se tiene una ecuación de primer grado, cuya gráfica es una recta. y en los casos restantes tenemos curvas cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y cuyo recorrido depende de que n sea par o impar; en el primer caso se obtienen sólo valores positivos y el recorrido es $[0;+\infty)$ mientras que en el caso impar obtenemos como recorrido también $\mathbb{R}$.

Funciones cuadráticas

Son funciones polinómicas de segundo grado, de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Su gráfica es siempre una parábola.

Funciones racionales

Son las que están expresadas mediante un cociente entre polinomios:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

El dominio está formado por todos los números reales excepto los valores de *x* que anulen el denominador, si los hay.

Funciones radicales

Son las que están expresadas con algún signo radical que afecta a la variable independiente *x.*

Para hallar su dominio hay que distinguir si el índice de la raíz es par o impar.